

Module "Probabilités", (durée 1,5 h)

Éléments de correction du partiel du 03.11.2025

Consigne : La présentation, la clarté et la qualité de vos raisonnements tiendront une part importante dans la notation. Calculatrice autorisée, une feuille A4 recto de notes de cours autorisée.

Exercice 1 Questions courtes et indépendantes.

1. Un employé doit ranger sur une étagère 3 dossiers bancaires (b_1, b_2 et b_3) et 4 dossiers RH (r_1, r_2, r_3 et r_4).
 - (a) Combien de choix a-t-il ?
Il a 7! choix possibles
 - (b) De combien de façons différentes peut-il ranger ces dossiers, si il veut qu'ils restent groupés par "genre" ?
On peut placer les dossiers bancaires à droite et les dossiers RH à gauche, ou l'inverse. Ce qui nous donne 2 choix de disposition des "genres". Une disposition de "genre" étant choisie, on a alors 3! choix pour placer les dossiers bancaires et 4! de disposition des dossiers RH. Finalement, on a $2 \times 3! \times 4! = 288$ choix possibles
2. On pioche 5 fois avec remise dans une urne contenant 10 lettres différentes. On obtient donc un mot à l'issue de ces 5 tirages. Combien de mots différents peut-on former ?
Il a 10^5 mots possibles
3. Un article peut présenter 2 défauts D_1 et D_2 . Sur 100 articles prélevés, 89 n'ont aucun défaut, 7 ont le défaut D_1 et 8 ont le défaut D_2 . Combien ont les 2 défauts ? Justifier soigneusement !
Avec les notations naturelles, on a : $\text{Card}\{D_1 \cap D_2\} = \text{Card}\{D_1\} + \text{Card}\{D_2\} - \text{Card}\{D_1 \cup D_2\} = 7 + 8 - (100 - 89) = 4$
4. Lors d'un oral, l'examineur propose aux candidats 2 sujets choisis aléatoirement dans une banque de 80 sujets.
 - (a) Quel est le nombre de tirages possibles ?
Il y a $\binom{80}{2} = \frac{80 \times 79}{2} = 3160$ tirages possibles.
 - (b) Olivier a préparé 10 de ces sujets. Calculer le nombre de tirages possibles comportant au moins l'un des sujets qu'il a révisés ?
Le plus rapide est probablement de passer par l'événement contraire.
Nbre de tirages avec aucun sujet révisé = $\binom{70}{2}$. Donc, Nbre de tirages avec au moins un sujet révisé = $\binom{80}{2} - \binom{70}{2} = 745$.

- (c) Combien aurait-il dû préparer de sujets (au minimum) pour qu'avec probabilité d'au moins 0,9 le tirage contienne au moins l'un des sujets révisés ?

On cherche le plus petit n entier tel que $\frac{\binom{80}{2} - \binom{80-n}{2}}{\binom{80}{2}} \geq 0,9$. Ce

qui se re écrit en $n^2 - 159n + 5688 \leq 0$. Inéquation du second degré qui donne numériquement, $n \approx 55$ ($\Delta = 2529$ et 2 racines $n_1 \approx 54,3$ et $n_2 \approx 104,6$)

5. (a) Combien de mots à 10 lettres peut on former avec 7 C et 3 D ?

On peut former $\binom{10}{3} = 120$ mots

- (b) Une machine, qui fabrique des pièces, a une probabilité 0,1 de fournir une pièce defectueuse. On prélève 10 pièces en sortie de fabrication. Quelle est la probabilité que 7 soient correctes ?

$\mathbb{P}(7 \text{ pièces soient correctes}) = \text{nb de config à 7 pièces correctes} \times \text{proba d'une config} = \binom{10}{7} \times 0,1^3 \times 0,9^7 \approx 0,057$.

6. Soit N la variable aléatoire indiquant le nombre d'articles vendus par jour d'un magasin. On donne sa loi :

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(N = k)$	0,04	0,1	0,2	0,4	0,26

- (a) Calculer $\mathbb{E}(N)$ et $Var(N)$. Interpréter.

On a $\mathbb{E}(N) = 2,74$ et $Var(N) = 1,1524$. Le magasin vend quotidiennement en moyenne 2,7 articles avec une variation approximativement de 1 article.

- (b) Définir et donner la fonction de répartition F de N . Tracer brièvement son graphe.

$$F(t) = \mathbb{P}(N \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 0,04 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 0,14 & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ 0,34 & \text{si } 2 \leq t < 3 \\ 0,74 & \text{si } 3 \leq t < 4 \\ 1 & \text{si } 4 \leq t \end{cases}$$

- (c) A l'aide exclusivement de F , calculer $\mathbb{P}(N < 3)$ et $\mathbb{P}(1 < N \leq 3)$.

On a :

- $\mathbb{P}(N < 3) = \mathbb{P}(N \leq 2) = F(2) = 0,34$ et,
- $\mathbb{P}(1 < N \leq 3) = \mathbb{P}(N \leq 3) - \mathbb{P}(N \leq 1) = F(3) - F(1) = 0,74 - 0,14 = 0,6$.

Exercice 2 Dans une usine, on utilise conjointement deux machines $M1$ et $M2$ pour fabriquer des pièces cylindriques en série. Sur une période donnée, leurs probabilités de tomber en panne sont respectivement 0,01 et 0,008. De plus la probabilité de l'événement "la machine $M2$ est en panne sachant que $M1$ est en panne" vaut 0,4.

1. Quelle est la probabilité d'avoir les deux machines en panne au même moment ?

Notons M_i l'événement "la machine i est en panne. On cherche $\mathbb{P}(M_1 \cap M_2)$.

Par le cours, on a : $\mathbb{P}(M_1 \cap M_2) = \mathbb{P}(M_2|M_1) \times \mathbb{P}(M_1) = 0,4 \times 0,01 = 0,004$.

2. Quelle est la probabilité d'avoir au moins une machine qui fonctionne ?

On cherche $\mathbb{P}(\overline{M_1 \cap M_2}) = 1 - \mathbb{P}(M_1 \cap M_2) = 0,996$.

3. Calculer la probabilité que la machine M_2 soit en panne, sachant que la machine M_1 fonctionne.

On cherche $\mathbb{P}(M_2|\bar{M}_1)$.

Par les probas totales, on a :

$\mathbb{P}(M_2) = \mathbb{P}(M_2|M_1) \times \mathbb{P}(M_1) + \mathbb{P}(M_2|\bar{M}_1) \times \mathbb{P}(\bar{M}_1)$. D'où l'on tire :

$$\mathbb{P}(M_2|\bar{M}_1) = \frac{\mathbb{P}(M_2) - \mathbb{P}(M_2|M_1) \times \mathbb{P}(M_1)}{\mathbb{P}(\bar{M}_1)} \approx 0,004$$

Exercice 3 Une entreprise fabrique des téléphones portables. Pendant la période de garantie, le fabricant doit effectuer les réparations à ses frais. On suppose dans cet exercice, que les problèmes des appareils réparables sont restreints à une défaillance de batterie ou bien un problème d'écran. Une étude indique :

- 3% sont jugés non réparables,
- 17% des téléphones sont réparables,
- 10% des téléphones ont uniquement un problème de batterie,
- 5% des téléphones ont uniquement un problème d'écran.

Dans les autres cas, le client n'utilisera pas la garantie de son téléphone. Les coûts pour l'entreprise sont de 20 € pour un problème de batterie, 40 € pour un problème d'écran, (60 € pour les 2 problèmes précédents simultanément !) et 100 € si le téléphone ne peut être réparé et s'il doit être remplacé. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque téléphone vendu, associe son coût de réparation et soient les événements suivants :

$E = \{\text{le tel est réparable et a un problème d'écran}\}$

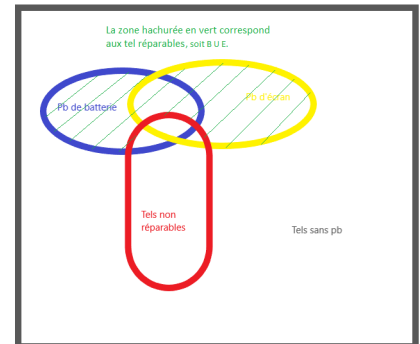
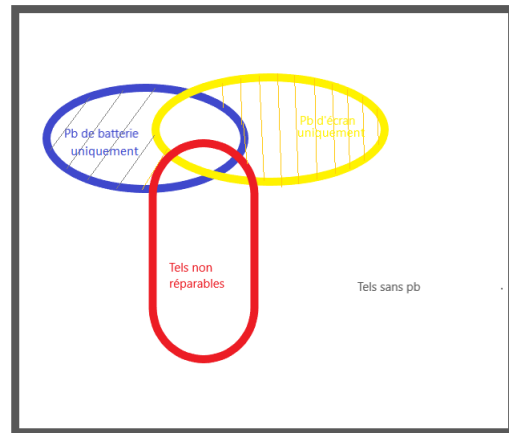
$B = \{\text{le tel est réparable et a un problème de batterie}\}.$

1. Calculer soigneusement $\mathbb{P}(E \cap B)$.

On ne connaît ni $\mathbb{P}(B)$, ni $\mathbb{P}(E)$, mais on connaît $\mathbb{P}(B \cap \bar{E}) = 0,1$ et $\mathbb{P}(E \cap \bar{B}) = 0,05$. Ainsi, on décompose $B \cup E$ en :

$$B \cup E = (B \cap \bar{E}) \cup (B \cap E) \cup (\bar{B} \cap E).$$

Cette union est disjointe. D'où $\mathbb{P}(B \cap E) = \mathbb{P}(B \cup E) - \mathbb{P}((B \cap \bar{E}) \cup (\bar{B} \cap E)) = \mathbb{P}(B \cup E) - \mathbb{P}(B \cap \bar{E}) - \mathbb{P}(E \cap \bar{B}) = 0,17 - 0,1 - 0,05 = 0,02$.



2. En déduire $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(E)$.

On a : $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap \bar{E}) + \mathbb{P}(B \cap E) = 0,1 + 0,02 = 0,12$. et de même $\mathbb{P}(E) = 0,07$.

3. Les événements B et E sont ils indépendants? Justifier.

Par ce qui précède, on a $\mathbb{P}(E \cap B) = 0,02$, $\mathbb{P}(B) = 0,12$ et $\mathbb{P}(E) = 0,07$. On remarque donc que $\mathbb{P}(E \cap B) \neq \mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}(B)$. Ainsi, les événements ne sont pas indépendants.

4. Quelles sont les valeurs possibles pour X ?

$X(\Omega) = \{0, 20, 40, 60, 100\}$.

5. Donner la loi de probabilité de X

k	0	20	40	60	100
$\mathbb{P}(X = k)$	0,8	0,1	0,05	0,02	0,03

— Les probabilités $\mathbb{P}(X = 20)$, $\mathbb{P}(X = 40)$ et $\mathbb{P}(X = 100)$ sont directement données dans l'énoncé.

— $\mathbb{P}(X = 60) = \mathbb{P}(B \cap E) = 0,02$ par la question 1.

— Enfin pour $\mathbb{P}(X = 0)$, on écrit :

$$\mathbb{P}(X = 0) = 1 - \mathbb{P}(X \in \{20, 40, 60, 100\}) = 1 - 0,1 - 0,05 - 0,02 - 0,03 = 0,8.$$

6. A quoi correspond l'événement $\{X > 0\}$. (Faire une phrase en "français" !). Calculer sa probabilité.

L'événement $\{X > 0\}$ correspond à "le tel a un problème". On a $\mathbb{P}(X > 0) = 0,2$.

7. Calculer $\mathbb{E}(X)$. Que représente cette valeur pour l'entreprise ?

$\mathbb{E}(X) = 8,2$ €, qui s'interprète comme le coût moyen de réparation d'un tel.

8. Un téléphone vendu 250 € a un coût de fabrication de 200 €. Quel est le bénéfice espéré pour l'entreprise, par téléphone vendu, après ses éventuels frais de garantie ?

Soit A la v.a indiquant le bénéfice sur un tel. On a : $A = 250 - 200 - X$, puis par linéarité de $\mathbb{E}$, on obtient $\mathbb{E}(A) = 50 - \mathbb{E}(X) = 41,8$ €.

9. La conjoncture économique implique que les coûts de réparation vont augmenter de 5%. Comment sera modifiée $\mathbb{E}(X)$?

Notons X' le nouveau coût des réparations, on a : $X' = 1,05X$. Par linéarité, on a alors : $\mathbb{E}(X') = 1,05 \mathbb{E}(X) = 8,61 \text{ €}$.

Je suis parti à la librairie,
j'ai trouvé un livre intitulé
"Comment résoudre 50%
de ses problèmes ?",
j'en ai acheté deux.

